



TITLE:

# 交差独立性完結による乱流の統計力学 (乱流の動力学的記述と統計力学的記述の相補性)

AUTHOR(S):

巽, 友正

---

CITATION:

巽, 友正. 交差独立性完結による乱流の統計力学 (乱流の動力学的記述と統計力学的記述の相補性). 数理解析研究所講究録 2010, 1721: 1-11

ISSUE DATE:

2010-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170425>

RIGHT:

## 交差独立性完結による乱流の統計力学

巽 友正 京都大学 (名誉教授)

Statistical Mechanics of Turbulence by Cross-Independence Closure  
Tomomasa Tatsumi Kyoto University (Emeritus Professor)

### 1. 乱流理論の力学性と統計性

本研究会の今年の主題は、『乱流の動力学的記述と統計力学的記述の相補性』となっている。この主題は、まさに乱流理論の本質に迫るもので、「乱流」の現象としての面白さも理論的な困難さも、まさに、この「力学性」と「統計性」の接点にある。

統計的な「乱雑性」を伴わない流体運動は、もはや、数値流体計算に委ねても良いかも知れない。また、力学的な「決定性」を伴わない乱雑運動は、いまや、確率過程論として取り扱うのが適当かも知れない。しかし、この「乱雑性」と「決定性」を併せ持つ「乱流」は、どの既成理論によっても律することの出来ない理論的特性をもっており、それが「乱流理論」を、今なお理論物理学の屈指の難問としている。しかし、問題の核心は、むしろその方法論にあるように思われる。

乱流は、乱雑ではあるけれども、一つの力学系としての流体の運動であるから、その時間的变化は、決定論的な運動方程式に従わなければならない。流体を非圧縮粘性流体と限定すれば、それは Navier-Stokes 運動方程式、および非発散条件、

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}) \mathbf{u} - \nu (\partial / \partial \mathbf{x})^2 \mathbf{u} = -\partial / \partial \mathbf{x} (p / \rho), \quad (1)$$

$$(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

によって与えられる。

いま、(1)、(2)式を、流れの代表的長さ  $L$ 、速さ  $U$  を用いて無次元化し、各変数に前と同じ記号を用いれば、無次元方程式は (1)、(2)式のまま、ただ粘性率  $\nu$  だけが、無次元数である Reynolds 数  $R = LU/\nu$  の逆数で置き換えられる。

無次元の(1)式は、非線形項  $(\mathbf{u} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}) \mathbf{u}$  と線形の散逸項  $(1/R)(\partial / \partial \mathbf{x})^2 \mathbf{u}$  を含むが、後に述べるように、乱流は高 Reynolds 数  $R \rightarrow \infty$  において起こるため、流れのほとんどの領域では非線形項が散逸項に優越し、局所的に大きい空間微分  $(\partial / \partial \mathbf{x})^2$  をもつ粘性散逸項が非線形項に拮抗する形となる。このとき乱流理論は、非線形散逸系力学という「力学的」問題を形成する。

一方、乱流を統計的現象と見るとき、その理論的対象は、乱流速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  の確率分布関数である。(圧力  $p(\mathbf{x}, t)$  は (1)、(2)式の間で消去できる。) このとき乱流理論は、対象が散逸系であるため、非平衡統計力学という「統計的」問題を形成する。

Reynolds の実験以来、一世紀を超える乱流研究の歴史を振り返るとき、それはつねに、非線形散逸系力学と非平衡統計力学との間を揺れ動いて来たように思われる。そして、その間における理論研究の数々の栄光と挫折の跡を辿るとき、われわれの得る教訓は、いまや乱流理論は、非線形散逸系力学と非平衡統計力学の理論的性格を併せ持つものでなければならない、ということである。

## 2. 初期の乱流理論

乱流の組織的な研究は、有名な Reynolds (1895) による、円管流における層流から乱流への遷移の実験的研究に始まる。このとき、乱流への遷移の条件が、円管の直径を  $L$ 、管軸方向の平均速度を  $U$  としたときの Reynolds 数  $R = UL/\nu$  の臨界値  $R_c$  によって与えられることを見出したのが、彼の画期的な業績である。

この時期以後、乱流の理論的研究は、臨界 Reynolds 数近傍の領域  $R \approx R_c$  における層流から乱流への遷移の機構に関するものと、より高い Reynolds 数  $R \rightarrow \infty$  の領域における発達した乱流を対象とするものとに大別される。ここでは後者の立場に限定するとすれば、まず問題となるのが平均流である。

### 2.1 平均流理論

円管流を含む管流の場合、乱流の軸方向の平均速度の分布は、層流に比べて、中心軸付近ではより平坦で、壁面付近ではより急勾配になる。一般に乱流において、平均流が層流と異なるのは何故か。その平均流はどのようにして求められるのか。これが、乱流における最初の問題である。

乱流の速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  の平均として、最も一般的な確率分布平均  $\langle \rangle$  をとり、

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad (3)$$

と書けば、 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  は平均速度を、 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  はその周りの変動速度を表す。

平均速度  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  に対する方程式は、(1)、(2)式の平均をとり、(3)式を考慮すれば、

$$\partial \bar{\mathbf{u}} / \partial t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}} + \langle (\hat{\mathbf{u}} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \rangle - \nu (\partial / \partial \mathbf{x})^2 \bar{\mathbf{u}} = -\partial / \partial \mathbf{x} (\langle p \rangle / \rho), \quad (4)$$

$$(\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\partial / \partial \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (5)$$

で与えられる。

平均流に対する(4)、(5)式は、(4)式の左辺の第3項を除いては、(1)、(2)式と全く同形である。したがって、同じ境界条件の下での、乱流の平均流の層流との違いは、全くこの項に依存する。この項は、2点速度相関と呼ばれる変動速度の積平均、

$$R_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \hat{u}_i(\mathbf{x}_1, t) \hat{u}_j(\mathbf{x}_2, t) \rangle, \quad i, j = (1, 2, 3) \quad (6)$$

の極限として表されるので、乱流の平均速度を知るには、当然2点速度相関を求めなければならない。

乱流の平均速度分布および速度相関に関しては、当時急速に発達した熱戦風速計を用いた精密な測定が行われるようになり、また理論的には、速度相関に対して気体運動論的な混合距離の概念を用いた近似理論が、Prandtl、Taylor、Karman など当時の第一人者によって展開された。しかしこの理論は、管流などの限られた乱流に関して一定の成果を収めたが、混合距離の概念が乱流の実態に対応しないために、一般的に有効な理論にまで発展するには至らなかった。詳細は、Goldstein (1938, Dover 1965) の第 V、VIII 章を参照されたい。

### 2.2 一様等方性乱流理論

乱流の平均流の研究が、速度相関の近似理論によって、大きな成果を収め得ないとしたとき、研究者の目が速度相関自身に向かうのは極めて自然である。そのとき、速度相関のテンソル的煩雑性を避けるために、敢えて平均流のない

一様等方性乱流を研究対象としたのは、Taylor(1935)の先見的な慧眼である。以来、一様等方性乱流の研究は、理論と実験ともに、平均流を伴う非一様乱流に比べて格段の発展を遂げ、その手法と成果が後者に拡張されることとなった。

一様等方性乱流においては、(6)式で定義される2点2次速度相関  $B_{ij}$ 、及び同様に定義される2点3次速度相関、

$$T_{ij,k}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \hat{u}_i(\mathbf{x}_1, t) \hat{u}_j(\mathbf{x}_1, t) \hat{u}_k(\mathbf{x}_2, t) \rangle, \quad i, j, k = (1, 2, 3) \quad (7)$$

は、それぞれ次のような等方テンソル形で表される。

$$B_{ij}(r, t) = -(r/2) \partial B_{LL}(r, t) / \partial r (r_i r_j / r^2) + \{B_{LL}(r, t) + (r/2) \partial B_{LL}(r, t) / \partial r\} \delta_{ij}, \quad (8)$$

$$T_{ij,k}(r, t) = -(r/2)(r \partial / \partial r - 1) T_{LLL}(r, t) (r_i r_j r_k / r^3) - (1/2) T_{LLL}(r, t) \delta_{ij} r_{kj} / r + (1/4)(r \partial / \partial r + 2) T_{LLL}(r, t) (\delta_{ik} r_j / r + \delta_{jk} r_i / r). \quad (9)$$

ここに、 $B_{LL}(r, t)$  と  $T_{LLL}(r, t)$  は、それぞれの速度成分としてベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  方向の縦速度成分のみをとった速度相関で、それぞれ、この2次、3次の縦速度相関関数という。 $\delta_{ij}$  等はクロネッカーのデルタを表す。また、いまの場合、速度相関テンソル  $B_{ij}$  と  $T_{ij,k}$  は乱流の一様等方性により、空間的には  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  だけの関数である。

速度相関テンソル  $B_{ij}$  と  $T_{ij,k}$  は、Navier-Stokes 方程式 (1) から導かれる次のようなテンソル方程式によって関係づけられる。

$$[\partial / \partial t - 2\nu \partial^2 / \partial r_k^2] B_{ii}(r, t) = -(\partial / \partial r_k) \{T_{ik,i}(r, t) - T_{ik,i}(-r, t)\}. \quad (10)$$

一様等方性乱流においては、(9)式は、(7)、(8)式を代入することによって、次のようなスカラー方程式の形に書ける。

$$[\partial / \partial t - 2\nu \{\partial^2 / \partial r^2 + (4/r)(\partial / \partial r)\}] B_{LL}(r, t) = -(\partial / \partial r + 4/r) T_{LLL}(r, t). \quad (11)$$

(10)式は一様等方性乱流における縦速度相関関数に対する力学方程式で、Karman と Howarth (1938)によって与えられ、Karman-Howarth 方程式として知られている。この方程式は、一様等方性乱流理論の成果として珠玉のような方程式であるが、1方程式に2個の未知関数  $B_{LL}$  と  $T_{LLL}$  を含むため、両者の関係が分からない限り解くことが出来ない。それでは、 $T_{LLL}$  を求めるために、(9)式より高次の方程式を導けば良いかという、それには4次のテンソルが現れるから、方程式系は依然として完結しない。これは、一般に非線形力学における完結性の問題であって、乱流理論も、自らの手でこの問題を解決しなければならない。この問題については、後に改めて述べる。

### 2.3 一様等方性乱流のスペクトル理論

一様等方性乱流においては、その速度場  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  を3次元的に Fourier 展開して取り扱うのが便利である。このとき、乱流速度  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  は次のように表される。

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] d\mathbf{k}. \quad (12)$$

ただ、Fourier 変換  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  が存在するためには、速度場  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  に条件、

$$\int |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)| d\mathbf{x} < \infty,$$

が成立していなければならないが、それは一様乱流場では一般に満たされない。このため数学的便法として、速度場を長さ  $L$  の3次元周期性的を持つものと考え、諸平均量を定義した後に  $L \rightarrow \infty$  の極限を取るものとする。(12)式も厳密には Lebesgue-Stieltjes 積分で表さなければならないが、ここでは上の表記を用いる。

係数関数  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  は波数空間における乱流速度を表し、(12)式の逆関係、

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-3} \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] d\mathbf{x}, \quad (13)$$

で表される。 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  が実数であるため、 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  は一般に複素数で、かつエルミート共役、

$$\text{re } \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t) = \text{re } \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t), \quad \text{im } \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t) = -\text{im } \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t), \quad (14)$$

を満たす。圧力  $p(\mathbf{x}, t)$  に対しても Fourier 展開を行うが、ここでは省略する。

波数空間における速度  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  を支配する方程式は、速度  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  に対する (1)、(2) 式に Fourier 展開 (11) 式を代入することによって、次のように得られる。

$$[\partial / \partial t + \nu k^2] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = -i \int (\mathbf{k}' \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t)) \{ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) - (\mathbf{k}/k^2)(\mathbf{k}' \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t)) \} d\mathbf{k}', \quad (15)$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (16)$$

ここに、(15)式では、圧力項が(16)式を用いて消去されている。

この他にも、波数空間における(15)、(16)式は、座標空間における(1)、(2)式に比べて、空間微分  $\partial/\partial \mathbf{x}$  が波数  $i\mathbf{k}$  との積に置き換えられ、このため、座標速度  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  の非発散性が波数速度  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  の  $\mathbf{k}$  直交性となるなど、数式的に格段の利便をもつことが明らかである。ここに、一様乱流では、スペクトル表記が重用される理由がある。

一様等方性乱流における2点2次および3次速度相関  $B_{ij}$  および  $T_{ijk}$  は、 $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  とおけば、波数空間において対応するスペクトル  $\Phi_{ij}$  および  $\Psi_{ijk}$  と、それぞれ次のように関係付けられる。

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{u}_i(\mathbf{x}, t) \hat{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{k}, \quad i, j = (1, 2, 3) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} T_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \langle \hat{u}_i(\mathbf{x}, t) \hat{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \hat{u}_k(\mathbf{x} + \mathbf{r}', t) \rangle \\ &= \int \Psi_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')] d\mathbf{k} d\mathbf{k}', \quad i, j, k = (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (18)$$

とくに、等方性乱流の場合、両テンソルの等方形、

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \Phi(k, t) \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \quad (19)$$

$$\int \Psi_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) d\mathbf{k}' = -(i/2k) \Psi(k, t) \{ k_i \Delta_{jk}(\mathbf{k}) + k_k \Delta_{ij}(\mathbf{k}) \}, \quad (20)$$

の関数  $\Phi$ 、 $\Psi$  の間に、次のような簡単な方程式が、(15)、(16)式から導かれる。

$$[\partial/\partial t + 2\nu k^2] \Phi(k, t) = k \Psi(k, t). \quad (21)$$

ここで、両関数を、

$$E(k, t) = 4\pi k^2 \Phi(k, t), \quad W(k, t) = 4\pi k^3 \Psi(k, t), \quad (22)$$

と書けば、

$$\int_0^\infty E(k, t) dk = (1/2) \langle |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle, \quad \int_0^\infty W(k, t) dk = 0, \quad (23)$$

となり、(21)式は次のように表される。

$$[\partial/\partial t + 2\nu k^2] E(k, t) = W(k, t). \quad (24)$$

(23)の両式は、関数  $E(k, t)$  が、乱流の運動エネルギー  $(1/2) \langle |\hat{\mathbf{u}}|^2 \rangle$  の波数  $k$  に対する分布、すなわちエネルギー・スペクトルを表すこと、そして、関数  $W(k, t)$  が、エネルギーの総量を変えずに分布を変える、エネルギー伝達関数を表すことを示している。

そして、(24)式は、エネルギー・スペクトル  $E(k, t)$  の時間的変化が、粘性  $\nu$  による減衰と、関数  $W(k, t)$  による波数間伝達によって、引き起こされることを示している。

方程式(24)は、波数空間における最重要な統計量であるエネルギー・スペクトル関数  $E(k, t)$  を支配する方程式で、座標空間における Karman-Howarth 方程式(11)に対応している。そして、高次項  $W(k, t)$  の物理的役割がより明確であるという点で、(11)式

より優れている。ただ、1個の方程式の中に2個の未知関数を含むために、方程式が閉じていない点では、(11) 式と全く同じである。この方程式の完結問題は、乱流理論の中心課題であるので、引き続き検討を行う。

## 2.4 Kolmogorov の局所等方性乱流理論

一様等方性乱流理論が、エネルギー的に重要な平均流を捨象して、乱流変動の解析を深めようとしたのに対して、むしろ、実在する平均流の多様性によらない乱流変動の普遍性を探ろうとしたのが、Kolmogorov (1941)の局所等方性乱流理論である。

彼は、高 Reynolds 数のもとでは、流体の速度場が、空間的に大きい渦運動(eddies)と小さい渦運動(eddies)とにスケール分離することに着目し、一般に乱流場においては、小さい渦運動は、大きい渦運動からのエネルギーの流入量と、粘性散逸によるエネルギーの流出量とが釣り合った、一種の局所平衡の状態にあるものと考えた。そして、小さい渦運動を、速度差  $\Delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_2, t) - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1, t)$  で表し、距離  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  が小さく、局所平衡領域に含まれる場合には、 $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  は統計的に乱流のエネルギー散逸率、

$$\varepsilon = \nu \sum_{i,j=(1,2,3)} \langle (\partial \hat{u}_i / \partial x_j)^2 \rangle \quad (25)$$

と、流体の粘性率  $\nu$  とによって決定されると仮定した [局所平衡仮説]。

さらに、より高い Reynolds 数においては、距離  $r$  の大きい値に対して、 $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  の統計は粘性率  $\nu$  によらずエネルギー散逸率  $\varepsilon$  だけに依存すると仮定して [慣性相似仮説]、縦速度差  $\Delta \hat{u}_L$  の  $2/3$  乗則、

$$\langle (\Delta \hat{u}_L)^2 \rangle = C \varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad C: \text{無次元定数}, \quad (26)$$

を導いた。この慣性相似則は、乱流のエネルギー散逸に対する普遍的な原則を表すもので、さきに述べた乱流の完結性の問題にも大きな示唆を与えるものである。

ただ、この相似則(27)は、その成立条件が定性的に述べられているため、後に、 $r$  のより小さい値に対して、パラメター  $\varepsilon$  の非一様性(intermittency)を考慮すべきとの批判を受け、修正を余儀なくされた (Kolmogorov(1962))。しかし、 $\varepsilon$  は元来  $r$  の関数として、速度相関方程式を用いて求めるのが一般的でないかと思われる。

それよりも、Kolmogorov 理論に関して留意すべき点は、小さい渦運動が局所平衡状態にあり、時間的に定常と仮定されている点である。一般に、準平衡状態では定常性は成り立たない。このことは、一般に時間的変化を伴う一様等方性乱流との対応において注意を要する。

## 3. 乱流の非線形散逸力学

乱流の基礎的研究は、第二次大戦による空白期を経て、戦後から今日に至るまで飛躍的な発展を遂げた。これには、実験面では、電子的測定技術の急速な発達と、高速数値計算能力の飛躍的な進歩が大きく寄与しているが、理論面でも、さきに述べた乱流理論の力学性と統計性の双方に関して画期的な進化を遂げたことが、与って力あると言える。このことは例えば、カオス(chaos)、ソリトン(soliton)、フラクタル(fractal)といった流体力学的用語が、今日、人口に膾炙している点からも伺われる。

ここでは、乱流理論の力学的発展を「非線形散逸力学」、統計的発展を「非平衡統計力学」としてとらえ、前者については本節、後者は次節において論じてみたい。

### 3.1 非線形散逸力学の完結問題

前節では、乱流の平均流、速度相関、エネルギー・スペクトルなどの平均速度積の取扱いにおいて、各次の速度積を支配する方程式が高次の項を含むために、方程式系が閉じておらず、これを如何に完結させるかが最大課題であることを見た。この「完結問題」への対応には、初期の乱流理論では、それぞれの対象に適した物理的描像が用いられたが、近年では、より一般的な数学的手法が模索されている。この意味で、乱流理論の成否は、ひとえに「完結問題」の解決に懸かっていると言える。

なお、完結問題は、乱流の「非線形散逸力学」および「非平衡統計力学」の両側面において、様式は異なるが、それぞれ存在する。したがって、前者については本節、後者は次節において、取扱うことになる。

まず、乱流の「非線形散逸力学」における完結問題というとき、その対象は自づから理論解析が比較的に進んだ一様等方性乱流の分野に限られる。ここでも、この分野における完結問題について概観してみよう。

### 3.2 準正規性仮説

一様等方性乱流に関しては、解析的便宜からスペクトル表示が用いられるが、最低次のエネルギー・スペクトル関数  $E(k, t)$  に対する方程式 (24) は、2個の未知関数を含むため閉じていない。完結問題としては、まずこの2個の未知関数の関係を考えるのが自然であるが、一様等方性乱流では1次の平均速度  $\langle \tilde{u}(\mathbf{k}, t) \rangle$  が 0 であるために、この両者の関係は考え難い。

そこで考えられるのが、第2の方程式としてエネルギー伝達関数  $W(k, t)$  に対する方程式を導き、この方程式の高次項である4次速度積と、2次速度積  $E(k, t)$  との間に完結仮説を導入する方法である。

エネルギー伝達関数  $W(k, t)$  を構成する3次速度積  $\Psi_{jki}$  に対する方程式は、(14)、(15)式から出発して、次のように求められる。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \nu(k^2 + k'^2 + k''^2)] \langle \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \rangle \\ &= M_{ilm}(\mathbf{k}) \sum_j \langle \tilde{u}_l(\mathbf{j}, t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}-\mathbf{j}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \rangle \\ &+ M_{jlm}(\mathbf{k}) \sum_j \langle \tilde{u}_l(\mathbf{j}, t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'-\mathbf{j}, t) \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \rangle \\ &+ M_{klm}(\mathbf{k}'') \sum_j \langle \tilde{u}_l(\mathbf{j}, t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}''-\mathbf{j}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_i(\mathbf{k}', t) \rangle, \quad \mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

この方程式は勿論、左辺に3次、右辺に4次の速度積を含むため閉じていない。

先に述べたように、(27)式の高次項である4次速度積と、2次速度積  $E(k, t)$  との間に完結仮説を考えるとすると、丁度適当な次のような関係が存在する。

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}''', t) \rangle &= \langle \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \rangle \langle \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}''', t) \rangle \\ &+ \langle \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \rangle \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}''', t) \rangle \\ &+ \langle \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}''', t) \rangle \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t) \rangle, \quad \mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

この関係式は、各速度が正規分布に従うときに厳密に成り立つ関係で、これを一般的な近似として用いる意味で「準正規性仮説」という。

この仮説は、Tatsumi (1958) および Proudman & Reid (1956) によって、一様等方性乱流に適用され、エネルギー・スペクトル関数  $E(k, t)$  に対する閉じたスカラー方程式が導かれた。この方程式は簡潔で、仮説の物理的根拠も明確であるため、乱流の完

結問題の完全な解として有力視されるに至った。

ところが、この方程式の初期値問題の数値計算が Ogura (1963)によって行われ、その結果、Reynolds 数の大きい値に対して、関数  $E(k,t)$  が波数  $k$  のある範囲にわたって急速に減少して負となることが示された。そして、この非物理的な結果によって、準正規性仮説は一挙に完結仮説として失格となった。

その後、負エネルギーの発生は、確率論の Markov 過程の考えを援用した、Orszag (1977)の「Markov 化準正規性仮説」によって解消することが示された。さらに、これに乱流散逸項を加えた完結が、Lesieur 等によって行われた(詳細は Lesieur (1987)を参照)。この修正は、著者も緊急避難的に採用したが (Tatsumi(1980))、それによって理論の力学的決定性が失われるので、根本的な解決とは考えなかった。

この問題は、後に乱流の速度分布関数の「完結問題」を取扱うに及んで、自然に解消することが分った。それは、この負エネルギーの発生が、非粘性の極限  $\nu \rightarrow 0$  では、エネルギー散逸率が  $\varepsilon > 0$  となる(「非粘性カストロフ」)のを、「準正規性仮説」では表現できなかったことに依るのである。これについては、後に改めて述べる。

### 3.2 物理的完結の諸理論

「準正規性仮説」による理論とほぼ同時期に、Kraichnan (1958) による「直接相互作用近似(DIA)」理論が提案され、学界の注目を集めた。この理論は、乱流の波数空間における構造としては準正規性近似(28)に近い考え方をとったが、決定的に異なったのは、平均速度積として異時刻速度をとり、全体としては定常乱流を考えた点である。このため、準正規性理論における負エネルギーの発生といった破綻は免れた。この理論はさらに、「ラグランジュ履歴-直接相互作用近似(LHDI)」理論を経て、慣性小領域における Kolmogorov スペクトル (27) の実現を含む、一貫した理論体系を形成するに至った。これらの理論については、これを量子力学の「再正規化群(Renormalization group)」理論の立場から詳細に論じた McComb (1990) の優れた解説があるので、参照をお勧めしたい。

## 4. 乱流の非平衡統計力学

これまでの乱流理論は、乱流の記述に、平均流、速度相関、エネルギー・スペクトルといった平均速度積を用いてきた。しかし、統計理論は元来、分布関数に関する議論を抜きにしては成り立たないものであり、この意味で従来の理論は、数多くの実際的成果にも拘わらず、原理的な背骨を欠いたものと言わねばならない。この乱流理論に、統計力学としての骨格を初めて与えたのが、Hopf (1952) である。

### 4.1 特性汎関数理論

Hopf は、一般の一樣乱流(等方性は要請しない)を対象とし、波数空間における速度ベクトル  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$  と複素変数ベクトル  $\mathbf{z}(\mathbf{k})$  とが作る特性汎関数、

$$\varphi(\mathbf{z}, t) = \langle \exp[i \int_{\Omega} \mathbf{z}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}] \rangle, \quad (29)$$

( $\Omega$  は位相空間)を定義して、 $\varphi(\mathbf{z}, t)$  の時間的変化を支配する方程式を、(14)、(15)式と確率保存則から導いた。この特性汎関数方程式は、一樣乱流の統計力学にとって最も原理的な基礎方程式であると言える。方程式については、巽(1962)を参照。



## 4.2 多点速度分布系理論

Hopf の特性汎関数理論に比して、一般性においてやや劣るものの、数式的に取扱  
い得る定式化を与えた理論に、Lundgren (1967) と Monin (1967) の多点速度分布系  
理論がある。これは、一様乱流における速度  $\hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_m, t)$  ( $m=1, \dots, n$ ) に対する結合速度  
分布、

$$f^{(n)}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1) \dots \delta(\mathbf{v}_n - \hat{\mathbf{u}}_n) \rangle, \quad (30)$$

を定義し、この分布  $f^{(n)}$  を支配する方程式系を一般的に導いたものである。

## 4.3 速度分布系の完結問題

この方程式系は、汎関数方程式とは違って、数学的に解ける点では優れているが、  
一方、分布  $f^{(n)}$  に対する方程式が高次分布  $f^{(n+1)}$  を含むため、このままでは解けないと  
いう難点をもっている。これは、先に述べた乱流の非線形散逸系力学における完結問  
題と同種の乱流の非平衡統計力学における完結問題であり、有限次の Lundgren-  
Monin 方程式系を解くためには、何らかの完結仮説を導入しなければならない。

これで、問題は振り出しに戻ったかの感があるが、以下に述べるように、速度分布系  
の関する完結問題は、平均速度積系のそれに比して、遙かに簡単で解決容易である  
ことが分かる。

## 4.4 準正規性仮説

(30)式で表される速度分布系に対する最も簡単な関係は、

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1; t) f(\mathbf{v}_2, \mathbf{x}_2; t), \quad (31)$$

で表される独立関係である。これを速度分布方程式系の完結仮説とすれば、それは、  
3.2 節で述べた平均速度積に関する準正規性仮説に相当する仮説で、やはり準正規  
性仮説と言う。この仮説は、分布  $f$  が正規分布である場合には厳密に成り立つが、一  
般には、距離  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  の大きい値  $r \rightarrow \infty$  に対してだけ成り立つことが知られている。

## 4.5 交差独立性仮説

ここで、以下のような完結仮説に関する考察が、Tatsumi (2001) によってなされた。

いま、2点速度  $\hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1, t)$ 、 $\hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_2, t)$  の代わりにそれらの和と差、

$$\hat{\mathbf{u}}_+ = (\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2)/2, \quad \hat{\mathbf{u}}_- = (\hat{\mathbf{u}}_2 - \hat{\mathbf{u}}_1)/2, \quad (32)$$

をとり、これらの交差速度についても、1点、2点速度分布を、次のように定義する。

$$g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_+ - \hat{\mathbf{u}}_+) \rangle, \quad g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_- - \hat{\mathbf{u}}_-) \rangle, \\ g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \langle \delta(\mathbf{v}_+ - \hat{\mathbf{u}}_+) \delta(\mathbf{v}_- - \hat{\mathbf{u}}_-) \rangle. \quad (33)$$

これらの交差速度分布の間にも、(31)式と同じ独立関係、

$$g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (34)$$

を考える。この関係式は、二つの2点分布間の恒等関係、

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_+ d\mathbf{v}_-,$$

すなわち、(32)式により、

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = 2^{-3} g^{(2)}(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \\ = 2^{-3} g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t), \quad (35)$$

となることを考えると、多点速度分布(30)を支配する Lundgren-Monin 方程式系に対す  
る完結仮説を与えることが分かる。これを交差独立性仮説という。

この交差独立性仮説は、準正規性仮説(31)とは違って、二点間の距離の大きい値  $r \rightarrow \infty$  だけでなく、小さい値  $r \rightarrow 0$  に対しても成り立つ。このうち、前者の  $r \rightarrow \infty$  の場合は、二つの1点分布が互いに独立になることに依るが、後者の  $r \rightarrow 0$  の場合は、次の論理によって保証される。

2点が一致した極限  $r=0$  では、2点速度分布  $f^{(2)}$  は、一般的に次のように表される。

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1; t) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

一方、 $r \rightarrow 0$  において、交差速度  $g_+$  と  $g_-$  は、

$$g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = g_+((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \rightarrow g_+(\mathbf{v}_1; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1; t) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t),$$

$$g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \rightarrow \delta(\mathbf{v}_-) = \delta((\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/2) = 2^3 \delta(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

となる。したがって、 $r \rightarrow 0$  において、

$$[f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) - 2^{-3} g_+(\mathbf{v}_+; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)] \rightarrow 0. \quad (36)$$

これは、 $r \rightarrow 0$  において、仮説(35)が成立していることを示している。

後に述べるように、Lundgren-Monin 方程式系の各方程式における高次項は、いずれも低次項への縮退形となっており、完結仮説はいずれも、これらの縮退速度分布の距離が0となる2点に対して適用される。したがって、完結仮説の有効領域は完結される高次項の領域と全く一致している。このため、この仮説による完結は、何らの近似や誤差を伴わない完全な自然完結となっている。

#### 4.6 1点速度分布方程式の完結

1点速度分布に対する Lundgren-Monin 方程式は、次のように得られている。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) \\ &= -\nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \int \mathbf{v}_2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 \\ &+ \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_2 d\mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (37)$$

この式の右辺の2項は、いずれも高次分布  $f^{(2)}$  を含み、かつ  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0$  の極限形であるため、完結仮説(35)の適用に最適の条件を具えていることが分かる。

(37)式の右辺の2項に(35)式を代入し、各項の評価を行えば、2項はいずれも1点分布  $f$  で表すことができ、次のような1点速度分布方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & [\partial/\partial t + \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 + \nu \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 |\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 \\ &+ \alpha(\mathbf{x}_1, t) |\partial/\partial \mathbf{v}_1|^2 - \partial/\partial \mathbf{v}_1 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1 \beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t)] f(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\alpha(\mathbf{x}_1, t) = (2/3) \nu \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0} |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2 \int |\mathbf{v}_-|^2 g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_-, \quad (39)$$

$$\beta(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t) = (1/4\pi) \int |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^{-1} (\mathbf{v}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 (1 + \mathbf{v}_- \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_1) g_-(\mathbf{v}_-; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) d\mathbf{v}_- d\mathbf{x}_2. \quad (40)$$

ここに、 $\alpha = (1/3)\epsilon$  はエネルギー散逸率、 $\beta$  は圧力のなす仕事を表すパラメータで、いずれも速度差分布  $g_-$  に依存する。これらの方程式は、一様等方性乱流に対して、Tatsumi et al (2004)によって初めて与えられた。

ここで留意すべきことは、(38)式の1次、2次の積分モーメントをとれば、それらが、Navier-Stokes 方程式から直接に求めた平均流方程式、エネルギー方程式と完全に一致することである。このことは、先に述べた交差独立性完結の厳密性を裏書きするものであり、さらに、速度積理論では非完結性に苦しんだ両方程式の解が、一括して(38)式の解から求めたれることは、速度分布理論の大きな成果と思われる。

#### 4.7 2点速度分布方程式の完結(外部領域)

2点速度分布  $f^{(2)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)$  に対する Lundgren-Monin 方程式は、1点方程式(37)を、そのまま2点に拡張した形に与えられている。すなわち、(37)式の左辺の移流項と右辺の粘性項と圧力項が、それぞれ点  $\mathbf{x}_1$  と  $\mathbf{x}_2$  に対して与えられ、項数が2倍となる。

高次の3点速度分布  $f^{(3)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3; t)$  は、3個の距離  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ 、 $r' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|$ 、 $r'' = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|$  を持つが、そのうち縮退した距離( $r' \rightarrow 0$ 、 $r'' \rightarrow 0$ )に対して、完結仮説(35)が適用される。このとき、残る  $r$  の値の大小によって、完結仮説の適用の仕方が変わるのである。

議論を明確にするために、距離  $r$  の小さい値( $r \rightarrow 0$ )の領域を、Kolmogorov 長さ  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$  と同程度で粘性と慣性が支配する局所領域、それ以外を慣性だけが支配する外部領域としよう。従来のエネルギー保有領域は外部領域に、慣性小領域はその下端にあることになる。

いま、 $r$  が外部領域にあるとすれば、局所領域にある  $r'$ 、 $r''$  に関する速度分布は、 $r$  に関する速度分布とは無関係に、1点分布の場合と同様に評価できる。その結果、外部領域における完結した2点速度分布方程式が得られるが、ここでは省略する。この方程式も Tatsumi et al (2004)によって一様等方性乱流の場合に与えられている。

#### 4.8 2点速度分布方程式の完結(局所領域)

2点速度分布  $f^{(2)}$  に対する方程式の完結に際して、距離  $r$  が、縮退した距離  $r'$ 、 $r''$  と同じ局所領域にあるとすれば、 $r'$ 、 $r''$  に関する速度分布は、 $r$  に関する速度分布と無関係ではあり得ない。この場合は、むしろ、距離  $r$  の小さい値( $r \rightarrow 0$ )を利用して、まず距離  $r$  に対して完結仮説(35)を適用し、その後に交差速度  $\mathbf{v}_+$ 、 $\mathbf{v}_-$  と速度  $\mathbf{v}_3$  との間に完結仮説(35)を適用する。

その結果、局所領域における完結した2点速度分布方程式が得られるが、ここでは省略する。この方程式も Tatsumi et al (2007)によって一様等方性の場合に与えられている。

#### 4.9 1点、2点速度分布による完結

先の諸節で見たように、1点速度分布  $f$  を支配する(38)式は、表面的には完結しているが、パラメータ  $\alpha$  の(39)式と  $\beta$  の(40)式が共に速度差分布  $g_-$  に依存するため、実質的には閉じていない。一方、2点速度分布  $f^{(2)}$  を支配する方程式は、外部領域と局所領域とを問わず、外形的には完結しており、パラメータ  $\alpha$ 、 $\beta$  の速度差分布  $g_-$  への依存性も変わらない。

この結果は、2点速度分布  $f^{(2)}$  が、(35)式によって速度和分布  $g_+$  と速度差分布  $g_-$  との積で表されることを考慮するとき、1点、2点速度分布  $f$ 、 $f^{(2)}$  の組に対しては、それらを支配する速度分布方程式が、外部領域と局所領域とを通じて完結していることを示している。

これは、一般に無限個の Lundgren-Monin 方程式系に対して、1点、2点速度分布方程式の完結系が「最小の自律決定系」を与えることを示したもので、さらに、ここで用いられた交差独立性完結が、何らの近似や誤差を伴わない自然完結であることを思い合わせるとき、重要な結果と考えられる。

## 引用文献

- Goldstein, S. (1938) *Modern Developments in Fluid Dynamics. I, II*. Clarendon Press, Oxford.
- Hopf, E. (1952) *J. Rat. Mech. Anal.* **1**, 87-123.
- Karman, T. & Howarth, L. (1938) *Proc. Roy. Soc. A*, 164, 192.
- Kolmogorov, A.N. (1941) *C. R. Acad. Sci. URSS*, **30**, 301-305.
- Kolmogorov, A.N. (1962) *J. Fluid Mech.* **13**, 82-85.
- Kraichnan, R.H. (1959) *J. Fluid Mech.* **5**, 497-543.
- Lesieur, M. (1987) *Turbulence in Fluids*. Kluwer Acad. Pub. Dordrecht.
- Lundgren, T.S. (1967) *Phys. Fluids*, **10**, 969-975.
- McComb, W.D. (1990) *The Physics of Fluid Turbulence*. Clarendon Press, Oxford.
- Monin, A.S. (1967) *PMM J. Appl. Math. Mech.* **31**, 1057-1068.
- Ogura, Y. (1963) *J. Fluid Mech.* **16**, 38-41.
- Orszag, S.A. (1977) Statistical Theory of Turbulence. In Les Houches Summer School, R. Balian & J.L. Peube eds. Gordon and Breach, pp.347-385.
- Proudman, I. & Reid, W.H. (1956) *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A* 247, 163-189.
- Reynolds, O. (1887) *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A* 174, 935-982.
- Tatsumi, T. (1957) *Proc. Roy. Soc. London, A* 239, 16-45.
- 巽 友正 (1962) *Turbulent Flows* (in Japanese). Maki Shoten, Tokyo.
- Tatsumi, T. (1980) Theory of Homogeneous Turbulence. *Adv. Appl. Mech.* **20**, 39-133.
- Tatsumi, T. (2001) In Kambe, T. et al. eds. *Geometry and Statistics of Turbulence*. Kluwer Ac. Pub. Dordrecht. pp.3-12.
- Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2004) *Fluid Dyn. Res.* **35**, 123-158.
- Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2007) *Fluid Dyn. Res.* **39**, 231-266.
- Taylor, G.I. (1935) *Proc. Roy. Soc. London, A* 151, 421-478.